妥当な論理式(1階述語論理)の証明図作成の1つの方法 (計算機科学の数学的基礎)

大芝, 猛; 永田, 周郎; 舟橋, 栄

数理解析研究所講究録
322巻 1978年 1-19

妥当な論理式(1階述語論理)の証明図作成の1つの方法

名工大　大芝　猛
永田周郎
舟橋　栄

与えられた1階述語論理の論理式Aに対する妥当性検証手続きに続けてAの証明図(Gentzen style)を作成する手続きの1つをのべる。

(phase 1) 与えられた論理式Aに同等な何らかの冠頭標準形$\mathcal{B}$を求め,次に$\mathcal{B}$と妥当性において同等な$\exists x_1 \cdots \exists x_n D(x_1, \cdots, x_n)$を求める($D(x_1, \cdots, x_n)$は開論理式)その上で

(phase 2) $D(\tau_{11}, \cdots, \tau_{1n}) \vee \cdots \vee D(\tau_{m1}, \cdots, \tau_{mn})$がトートロジーとなるような自然数$m \geq 1$と$\tau_{ij} \in U(D(x_1, \cdots, x_n))$($D(x_1, \cdots, x_n)$のエルブラン領域の項)とがあれば(このときAは妥当)これを見出す手続きの1つを[5]において与えた。またこの手続きに対するプログラムを作成しいくつかの例に適用して得た結果等を報告したが、こゝでは更に上記の方法で妥当性の検証が肯定された論理式Aについて、その証明図を次の3つのphasesに分けて作成する

前記 phase において得た∀, ∃なしのトートロジー $D(\tau_{11}, \cdots, \tau_{1n}) \vee \cdots \vee D(\tau_{m1}, \cdots, \tau_{mn})$ を利用し，まず

(phase 3)　$D(\tau_{11}, \cdots, \tau_{1n}) \vee \cdots \vee D(\tau_{m1}, \cdots, \tau_{mn})$ の命題論理としての証明図を上方に展開して書き上げ，更に

(phase 4)　この $D(\tau_{11}, \cdots, \tau_{1n}) \vee \cdots \vee D(\tau_{m1}, \cdots, \tau_{mn})$ にいたる証明図の下方に，適切な順序で ∀, ∃ 推論を適用*して行くことにより（Aの冠頭標準形）$\mathcal{B}$ にいたる証明図を作成する。

(phase 5)　更にこの（Aの標準形）$\mathcal{B}$ の下に標準形変形の逆の変形に対する推論を付加して A の証明図をうる。

[註] * phase 1 において冠頭標準形 $\mathcal{B}$ から ∀ を消去して $\exists x_1 \cdots \exists x_n D(x_1, \cdots, x_n)$ を作るとき，スコーレム関数があらわれ従って $D(\tau_{11}, \cdots \tau_{1n}) \vee \cdots \vee D(\tau_{m1}, \cdots, \tau_{mn})$ にスコーレム関数をもつ項があらわれるが，phase 4 において，これらの項は適当な自由変数におきかえられ，かつ ∀ 推論によって束縛されて $\mathcal{B}$ にいたる証明図が出来る。そのためこの証明図の中にもスコーレム関数はあらわれない。

[証明図に関する Notation 等]

(0)　本稿での1階述語論理の体系は本質的に Gentzen の LK（関数記号を許す）を用いるものとする。

但し phase 3，phase 4 の証明図作成においては便宜上

(1) 始式として $\to B_1,\cdots,B_p, A, C_1,\cdots,C_q, \neg A, D_1,\cdots,D_r$

$\to B_1,\cdots,B_p, \neg A, C_1,\cdots,C_q, A, D_1,\cdots,D_r$

$(p, q, r \geqq 0)$ を許すものとする（LKで $A \to A$ から証明可能）

(2) また推論として，(LKのいくつかの推論を用いておきかえうる)次のものを許すものとする。

"∨" $\dfrac{\to \Gamma, A, B, \Delta}{\to \Gamma, A \vee B, \Delta}$ "∧" $\dfrac{\to \Gamma, A, \Delta \qquad \to \Gamma, B, \Delta}{\to \Gamma, A \wedge B, \Delta}$

減 $\dfrac{\to \Gamma, A, \Delta, A, \Pi}{\to \Gamma, A, \Delta, \Pi}$ 減 $\dfrac{\to \Gamma, A, \Delta, A, \Pi}{\to \Gamma, \Delta, A, \Pi}$

換 $\dfrac{\to \Gamma, A, \Delta, B, \Pi}{\to \Gamma, B, \Delta, A, \Pi}$ 増 $\dfrac{\to \Gamma, \Delta}{\to \Gamma, A, \Delta}$

∃ $\dfrac{\to \Gamma, A(\tau), \Delta}{\to \Gamma, \exists_x A(x), \Delta}$ ∀ $\dfrac{\to \Gamma, A(\alpha), \Delta}{\to \Gamma, \forall_x A(x), \Delta}$

（α は下の列にはあらわれない）

phase 3, *phase* 4 における証明は上記形の始式と推論のみを用いて構成するため *Sequent*（列）は左辺をもたなり $\to A_1,\cdots,A_k$ なるもののみあらわれ，¬推論，*Cut*（三段論法)もあらわれない．

持に *phase* 3 では (1) の形の始式と (2) の "∨" または "∧" の推論のみが用いられる．

以下各phaseの内容を説明する。

[phase 1] Aに同等な冠頭標準形 $\mathcal{B}$ =

$\exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 \cdots \exists x_k \forall y_k \exists x_{k+1} B(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k, x_{k+1})$

を求める。(但し $\exists x_i$ は $\exists x_{i1}\cdots\exists x_{id_i}$ $(d_i \geqq 0)$ なる∃束縛の有限列の省略形, $k \geqq 0$ とし $B(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k, x_{k+1})$ は原始論理式と ¬, ∨, ∧ のみからなる閉論理式で ¬ は原始論理式の直前にのみついているものとする。) この手続きの具体的記述は省略する ([1], [3], [4] 参照)。

次いで Aまたは $\mathcal{B}$ にあらわれない関数記号 $f_1, \cdots f_k$ を用い、

(*1) $B(x_1, f_1(x_1), \cdots, x_k, f_k(x_1, \ldots, x_k), x_{k+1})$ を $= D(x_1, \ldots, x_n)$ とおけば、エルブランの定理より、

A が妥当 $\rightleftarrows$ $\exists x_1 \cdots \exists x_n D(x_1, \ldots, x_n)$ が妥当

$\rightleftarrows$「$D(\tau_{11}, \cdots \tau_{1n}) \vee \cdots \vee D(\tau_{m1}, \cdots \tau_{mn})$ が妥当となる $m \geqq 1$ と $\tau_{ij} \in U(D(x_1, \ldots, x_n))$ が存在する。」

[phase 2] 上記 $D(\tau_{11}, \ldots, \tau_{1n}) \vee \cdots \vee D(\tau_{m1}, \ldots, \tau_{mn})$ が妥当となる $m \geqq 1$, と τ_{ij} があれば求める手続き Fig. 1 に入る。(この手続きの正当性は Appendix または[5]参照。)

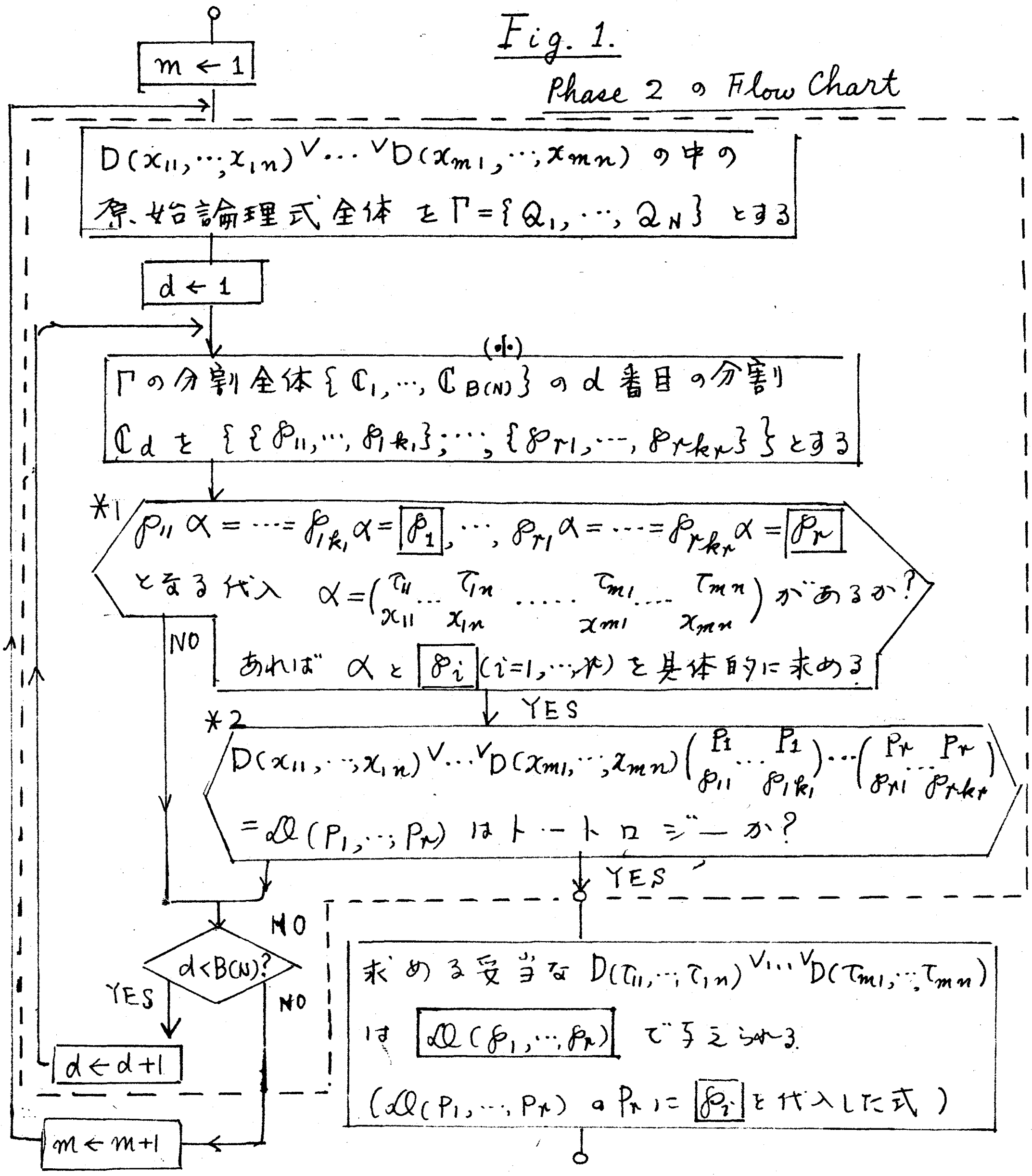
A が妥当のときは、肯定的に終了し、

(*2) $D(\tau_{11}, \cdots, \tau_{1n}) \vee \cdots \vee D(\tau_{m1}, \cdots, \tau_{mn}) = \mathcal{Q}(\mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_r)$ なる形で求まる。こゝに $\mathcal{Q}(P_1, \cdots, P_r)$ は命題論理のト

ートロジーで，命題変数P_iに代入する$\wp_i$は原始論理式であり，Fig 1の(小)において説明されているように$D(x_{11},\cdots,x_{1n})\vee\cdots\vee D(x_{m1},\cdots,x_{mn})$の中にあらわれるある原始論理式にエルブラン領域のある項を代入したものとして求まる。

Fig. 1.

Phase 2 の Flow Chart



(註)(小) B(N) は N 個の集合の分割の総数（Bell数）

[phase 3]　phase 2 で求めた

$D(\tau_{11},\cdots,\tau_{1n})\vee\cdots\vee D(\tau_{m1},\cdots,\tau_{mn})=\mathscr{D}\ell(\wp_1,\cdots,\wp_r)$

に対し indicate した $\vee$ を , におきかえた

$D(\tau_{11},\cdots,\tau_{1n}),\cdots,D(\tau_{m1},\cdots,\tau_{mn})=\Delta(\wp_1,\cdots,\wp_r)$

にいたる証明図を作る：

$\mathscr{D}\ell(P_1,\cdots,P_r)$ はトートロジー故 $\Delta(P_1,\cdots,P_r)$ にいたる "∧" 右と "∨" 右推論のみ用いた証明図

Proof[$\rightarrow\Delta(P_1,\cdots,P_r)$]

を下に述べる手順(※)により作れる。([4] 参照)

従ってこの証明図の中の「すべての P_i を素始論理式 $\wp_i$ でおきかえ」($i=1,\cdots,r$) れば $\rightarrow\Delta(\wp_1,\cdots,\wp_r)$ にいたる証明

Proof[$\rightarrow D(\tau_{11},\cdots,\tau_{1n}),\cdots,D(\tau_{m1},\cdots,\tau_{mn})$]

をうる。

(手順 ※)

(0)　与えられた Sequent $\overrightarrow{}\Delta(P_1,\cdots,P_r)$ を処理対象 Sequent S として indicate，未処理分岐(位置の)記憶 stack を clear して (1) へ進む

(1)　処理対象 Sequent S に論理式 A と $\neg A$ とがあらわれているか？

(1−1) YES のときは未処理分岐記憶 stack は空か？

(1−1−1) YES のとき，証明図作成は終る。

(1-1-2) NO のとき，stack の最上部に記憶されている未処理分岐位置をとり出し その位置のSequentを処理対象 sequent Sとして indcate l(1)へ戻る.

(1-2) NO のとき：indicate されたSequent S の論理式の中に $A \vee B$ なるものがあるか？

(1-2-1) YES のとき：S の中の $A_i \vee B_i$ なる論理式をすべて A_i, B_i におきかえたSequent S' をSの上に書き. S'を処理対象Sequent S として (1)へ戻る.

(1-2-2) No のとき：

Sの中に $A \wedge B$ なる論理式があるか？

(1-2-2-1) YES のとき：

$S = \Gamma, A \wedge B, \Delta$ （Γ に $A_i \wedge B_i$ なし）

とおける. S を下のSequent とし Λ 右推論の上式 S', S'' を上に書き

$$\frac{\overset{S'}{\rightarrow \Gamma, A, \Delta} \qquad \overset{S''}{\rightarrow \Gamma, B, \Delta}}{\underset{S}{\rightarrow \Gamma, A \wedge B\ \Delta}}$$

S''を未処理分岐 stack の最上部に記憶させ，S'を処理対象 Sequent S とし (1)へ戻る.

(1-2-2-2) No のとき：証明図なし STOP.

[Phase 4] phase 3 で求めた証明図

Proof$[\to D(\tau_{11},\cdots,\tau_{1n}),\cdots,D(\tau_{m1},\cdots,\tau_{mn})]$ の $D(x_1,\cdots,x_n)$ は

$B(x_1,f_1(x_1),\cdots,f_k(x_1,\cdots,x_k),x_{k+1})$ なる形故，証明図

(*) Proof$[\to B(\sigma_{11},\underline{f}_1(\sigma_{11}),\cdots,\sigma_{1k},\underline{f}_k(\sigma_{11},\cdots,\sigma_{1k}),\sigma_{k+1}),\cdots$

$\cdots,B(\sigma_{m1},\underline{f}_1(\sigma_{m1}),\cdots,\sigma_{mk},\underline{f}_k(\sigma_{m1},\cdots,\sigma_{mk}),\sigma_{m\,k+1})]$

が得られたことになる。(但し σ_{ij} を代入する以前からあるスコーレム関数には"－"をつけ indicate しておく．また(*)の終式の $\underline{f}_j(\sigma_{i1},\cdots,\sigma_{ij})$ $(i=1,\cdots,k)$ のすべてに (*)にない異る自由変数を対応させて用意する．簡単のため以下でこれを $\alpha_{f_j(\sigma_{i1},\cdots,\sigma_{ij})}$ と記述することにする。) $\underline{f}_j$ に対する証明図(*)の項 $\underline{f}_j(\sigma_{i1},\cdots,\sigma_{ij})$ を適切な順序で自由変数 $\alpha_{f_j(\sigma_{i1},\cdots,\sigma_{ij})}$ でおきかえつつ $\forall y_j$ 推論で束縛して行く($\exists x_j\forall y_j$ のように $\exists x_j$ も続けて束縛する) ことにより 証明図

(※) Proof$[\to \exists x_1\forall y_1\cdots\exists x_k\forall y_k\exists x_{k+1}B(x_1,y_1,\cdots,x_k,y_k,x_{k+1})]$

を作成する．精しい手順は次の通り。但し記述が冗長になるため，$k=2$ の場合を述べる(f_1 を f，f_2 を g とする．)

(Procedure 0)　証明図(*)：　即ち

Proof$[\to B(\pi_1,\underline{f}(\pi_1),\sigma_1,\underline{g}(\pi_1,\sigma_1),\omega_1),\cdots,B(\pi_m,\underline{f}(\pi_m),\sigma_m,$

$\underline{g}(\pi_m,\sigma_m),\omega_m)]$ から"∃"，"増"を用い，直ちに

Proof$[\to \exists x_3B(\pi_1,\underline{f}(\pi_1),\sigma_1,\underline{g}(\pi_1,\sigma_1),x_3),\cdots,\exists x_3B(\pi_m,\underline{f}(\pi_m),\sigma_m,$

$\underline{g}(\pi_m,\sigma_m),x_3),\exists x_1\forall y_1\exists x_2\forall y_2\exists x_3B(x_1,y_1,x_2,y_2\,x_3)]$ をうる。

これを $\mathbb{P}(m, 0)$ とおく. これに次の Procedure 1 を繰り返し適用すれば目的の証明図をうる。

(Procedure 1) $\mathbb{P}(p, q) =$

$\mathrm{Proof}\,[\to \exists x_3 B(\pi_1, \underline{f}(\pi_1), \sigma_1, \underline{g}(\pi_1, \sigma_1), x_3), \cdots, \exists x_3 B(\pi_p, \underline{f}(\pi_p), \sigma_p, \underline{g}(\pi_p, \sigma_p), x_3),$
$\exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 B(v_1, \underline{f}(v_1), x_2, y_2, x_3), \cdots, \exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 B(v_q, \underline{f}(v_q), x_2, y_2, x_3),$
$\exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 B(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3)]$ (✲)

なる証明図が与えられたとき $(p, q) \neq (0, 0)$ ならば $(p', q') < (p, q)$ (即ち $p' < p$ or $(p' = p$ & $q' < q))$ なる証明図 $\mathbb{P}(p', q')$ を次のように作りうる:

(1) $\underline{g}(\pi_i, \sigma_i) = \underline{g}(\pi_j, \sigma_j)$ $(i \neq j)$ なる i, j があるとき:
✲ の [ ] 内の式の第1行目の i 番目と j 番目とは同じ論理式であるため, "減-推論" により1つの式とした Sequent を下につけ加え $\mathbb{P}(p-1, q)$ をうる。

(2) (1) でなく, $\underline{f}(v_k) = \underline{f}(v_l)$ $(k \neq l)$ なる k, l があるとき.
✲ の [ ] 内の式のうち第2行目の第 k 番目と l 番目とは同じ論理式故 (1) と同様, "減推論" により $\mathbb{P}(p, q-1)$ をうる.

(3) (1) でなくかつ (2) でないとき: このとき $\underline{g}(\pi_i, \sigma_i)$ $(i = 1, \cdots, p)$, $\underline{f}(v_j)$ $(j = 1, \cdots, q)$ はすべて異る (但し $p = 0$ or $q = 0$ も許す) このとき
$\deg(\underline{g}(\pi_i, \sigma_i))$, $\deg(\underline{f}(v_j))$ の最大のものの1つを

search する.(但し $deg(\tau)$ =「τ の記号の個数」とする).

(3−1) degree 最大の1つが $\underline{g}(\pi_\alpha, \varpi_\alpha)$ のとき, 証明図 $\mathbb{P}(p, q)$ の最下の Sequent では α 番目の式 $\exists x_3 B(\pi_\alpha, \underline{f}(\pi_\alpha), \varpi_\alpha, \underline{g}(\pi_\alpha, \varpi_\alpha), x_3)$ にのみあらわれる。$\mathbb{P}(p, q)$ 内の $g(\pi_\alpha, \varpi_\alpha)$ を自由変数 $\alpha_{g(\pi_\alpha, \varpi_\alpha)}$ におきかえ(小), 続いて $\forall y_2$, $\exists x_2$ 推論を用いる。即ち α 番目の式の所を indicate すれば

$$\frac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \to \Gamma, \exists x_3 B(\pi_\alpha, \underline{f}(\pi_\alpha), \varpi_\alpha, \alpha_{g(\pi_\alpha, \varpi_\alpha)}, x_3), \Delta\end{array}}{\to \Gamma, \forall y_2 \exists x_3 B(\pi_\alpha, \underline{f}(\pi_\alpha), \varpi_\alpha, y_2, x_3), \Delta}}{\to \Gamma, \exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 B(\pi_\alpha, \underline{f}(\pi_\alpha), x_2, y_2, x_3), \Delta}$$

となり. 更に"換−推論"を用いれば $\mathbb{P}(p-1, q+1)$ をうる.

(3−2) degree 最大の1つが $\underline{f}(\upsilon_h)$ のときにも. この $\underline{f}(\upsilon_h)$ は $\mathbb{P}(p, q)$ の最下の Sequent では $d+h$ 番目の式 $\exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 B(\upsilon_h, \underline{f}(\upsilon_h), x_2, y_2, x_3)$ にのみあらわれる故 (3−1) と同様に $\forall y_1$, $\exists x_1$ 推論を適用し"減推論"を用いれば $\mathbb{P}(p, q-1)$ をうる.

註(小) procedure 適用の各段階での証明図 $\mathbb{P}(p, q)$ につき「$\mathbb{P}(p, q)$ の中にあらわれる $g(\pi_i, \varpi_i)$, $f(\upsilon_j)$ の一部分(図形としての)を束縛する $\exists$, $\forall$ 推論は存在しない」という性質は保存される故 $g(\pi_\alpha, \varpi_\alpha)$ を $\alpha_{g(\pi_\alpha, \varpi_\alpha)}$ におきかえても正し

い証明図となる．（もし $g(\pi_i, \varpi_i)$ または $f(\vartheta_j)$ の一部分を束縛する∃，∀推論があれば下式に束縛変数を内部にもつ $g(\pi_i', \varpi_i')$，または $f(\vartheta_j')$ を生ずる．しかるに証明図 $\mathbb{P}(p, q)$ には Cut はないため最下の Sequent（※の［］内の Sequent）内にかゝる図形 $g(\pi_i'', \varpi_i'')$ または $f(\vartheta_j'')$ が残ることになり矛盾する．）

かくして得られた証明図 $\mathbb{P}(0, 0)$ は

$(※)'$ Proof $[\to \exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 B(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3)]$ であるが，

この証明図の中に残されたスコーレム関数は次のようにして消去される：

証明図 $(※)'$ 内の各論理式内のスコーレム関数について「項の構成上からその外には他のスコーレム関数はもはや無い」というスコーレム関数をすべて"＿"とつけて indicate する

証明図内のかゝる indication をもつ $\underline{f}$，$\underline{g}$ で囲まれた項で形の異なるものをすべて列挙し

$\underline{g}(\rho_1, \mu_1), \cdots, \underline{g}(\rho_r, \mu_r), \underline{f}(\lambda_1), \cdots, \underline{f}(\lambda_s)$ とする．

前記(註)(ハ)と同様にこれらの項の図形としての一部分を束縛する ∀，∃ 推論はないので，これらを異る自由変数 $\beta_{g(\rho_1, \mu_1)}, \cdots, \beta_{g(\rho_r, \mu_r)}, \beta_{f(\lambda_1)}, \cdots, \beta_{f(\lambda_s)}$ でおきかえても正しい証明となる．かくして目的の証明図を得る

EXAMPLE $A = \neg\exists_y \forall_z (P(z,y) \equiv \neg\exists_x (P(z,x) \wedge P(x,z)))$

$\boxed{\textit{phase 1}}$ (1) Aの冠頭標準形を求める.

$$A = \neg\exists_y\forall_z(P(z,y)\equiv\neg\exists_x(P(z,x)\wedge P(x,z)))$$

$$\equiv \neg\exists_y\forall_z((\neg P(z,y)\vee\neg\exists_x(P(z,x)\wedge P(x,z)))\wedge(\neg\neg\exists_x(P(z,x)\wedge P(x,z))\vee P(z,y)))$$

$$\equiv \forall_y\exists_z((P(z,y)\wedge\exists_x(P(z,x)\wedge P(x,z)))\vee(\forall_x(\neg P(z,x)\vee\neg P(x,z))\wedge\neg P(z,y)))$$

変数をつけかえ

$$\equiv \forall_{y_0}\exists_{x_1}((P(x_1,y_0)\wedge\exists_{x_2}(P(x_1,x_2)\wedge P(x_2,x_1)))\vee(\forall_{y_1}(\neg P(x_1,y_1)\vee\neg P(y_1,x_1))\wedge\neg P(x_1,y_0)))$$

$$\equiv \forall_{y_0}\exists_{x_1}\forall_{y_1}\exists_{x_2}(\underbrace{(P(x_1,y_0)\wedge(P(x_1,x_2)\wedge P(x_2,x_1)))\vee((\neg P(x_1,y_1)\vee\neg P(y_1,x_1))\wedge\neg P(x_1,y_0))}_{B(y_0,\,x_1,\,y_1,\,x_2)})$$

(2) Aと妥当性において同等な $\exists_{\mathbf{x}} D(\mathbf{x})$ を求める

$$A \sim \exists_{x_1}\exists_{x_2}(\underbrace{P(x_1,\underline{a})\wedge(P(x_1,x_2)\wedge P(x_2,x_1)))\vee((\neg P(x_1,\underline{f}(x_1))\vee\neg P(\underline{f}(x_1),x_1))\wedge\neg P(x_1,\underline{a})}_{D(x_1,x_2)\,:\,B(\underline{a},\,x_1,\,\underline{f}(x_1),\,x_2)}))$$

$\boxed{\textit{phase 2}}$ 「$D(\tau_{11},\tau_{12})\vee\cdots\vee D(\tau_{m1},\tau_{m2})$ が妥当となる τ_{ij} が存在するか?」の検証を $m=1,2,\cdots\cdots$ について Fig. 1 の手続きに従い行う.

($m=1$) については否定的に判定され　$m=2$ に進む

($m=2$) のとき次のように肯定的に判定され"Aが妥当である"ことが結論される.:

☞ $D(x_{11},x_{12})\vee D(x_{21},x_{22})$ の原始論理式の全体は

$$\Gamma = \{P(x_{11},\underline{a}), P(x_{11},x_{12}), P(x_{12},x_{11}), P(x_{11},\underline{f}(x_{11})), P(\underline{f}(x_{11}),x_{11}),$$
$$P(x_{21},\underline{a}), P(x_{21},x_{22}), P(x_{22},x_{21}), P(x_{21},\underline{f}(x_{21})), P(\underline{f}(x_{21}),x_{21})\}$$

$= \{ \mathcal{Q}_1, \cdots, \mathcal{Q}_{10} \}$, Γの類別全体 $= \{ \mathbb{C}_1, \cdots, \mathbb{C}_{B(10)} \}$

Γの類別と $\mathbb{C}_\alpha$ と $\mathbb{C}_1 = \{\{\mathcal{Q}_1, \cdots, \mathcal{Q}_{10}\}\}$ から $\mathbb{C}_{B(10)} = \{\{\mathcal{Q}_1\}, \cdots, \{\mathcal{Q}_{10}\}\}$

に向って①Fig. 1 の ＊1

②Fig 1 の ＊2 の検証を行って行けば

$\mathbb{C}_{\alpha_0} = \{\{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3\}, \{\mathcal{Q}_4, \mathcal{Q}_8\}, \{\mathcal{Q}_5, \mathcal{Q}_6, \mathcal{Q}_7\}, \{\mathcal{Q}_9\}, \{\mathcal{Q}_{10}\}\}$

なる類別のときに双方共肯定される. 即ち

①「$\mathcal{Q}_1\alpha = \mathcal{Q}_2\alpha = \mathcal{Q}_3\alpha = \boxed{\mathcal{P}_1}$, $\mathcal{Q}_4\alpha = \mathcal{Q}_8\alpha = \boxed{\mathcal{P}_2}$, $\mathcal{Q}_5\alpha = \mathcal{Q}_6\alpha = \mathcal{Q}_7\alpha = \boxed{\mathcal{P}_3}$

$\mathcal{Q}_9\alpha = \boxed{\mathcal{P}_4}$, $\mathcal{Q}_{10}\alpha = \boxed{\mathcal{P}_5}$」 をみたす代入 α の存在が肯定

され、実際 $\alpha = \begin{pmatrix} a & a & f(a) & a \\ x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ 即ち $\tau_{11} = \tau_{12} = \tau_{22} = a$, $\tau_{21} = f(a)$

と求まる. (この＊1の検証のアルゴリズムについては

[3] 等参照). 従ってまた

$\boxed{\mathcal{P}_1} = p(a, a)$, $\boxed{\mathcal{P}_2} = p(a, f(a))$, $\boxed{\mathcal{P}_3} = p(f(a), a)$, $\boxed{\mathcal{P}_4} = p(f(a), f(f(a)))$

$\boxed{\mathcal{P}_5} = p(f(f(a)), f(a))$ も具体的に求まる.

② 更に $D(x_{11}, x_{12}) \vee D(x_{21}, x_{22})$ において上記類別 $\mathbb{C}_{\alpha_0}$ の 5 組の類々論理式をそれぞれ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 でおきかえてうる論理式

$((P_1 \wedge (P_1 \wedge P_1)) \vee ((\neg P_2 \vee \neg P_3) \wedge \neg P_1)) \vee ((P_3 \wedge (P_3 \wedge P_2)) \vee ((\neg P_4 \vee \neg P_5)$

$\wedge \neg P_3)) : \mathcal{Q}(P_1, \cdots, P_5)$ はトートロジーと判定される.

従って求める妥当な $D(\tau_{11}, \tau_{12}) \vee D(\tau_{21}, \tau_{22})$. は

$\mathcal{Q}(\boxed{\mathcal{P}_1}, \cdots, \boxed{\mathcal{P}_5}) = ((p(a,a) \wedge (p(a,a) \wedge p(a,a))) \vee ((\neg p(a, f(a)) \vee \neg p(f(a), a))$

$\wedge \neg p(a,a))) \vee ((p(f(a), a) \wedge (p(f(a), a) \wedge p(a, f(a)))) \vee ((\neg p(f(a), f(f(a)))$

$\vee \neg P(f(f(a)), f(a))) \wedge \neg P(f(a), a)))$ で与えられる

$\boxed{\text{phase } 3}$ (1) $\mathcal{Q}(P_1, \cdots, P_5)$ の証明図 Proof$[\to \mathcal{Q}(P_1, \cdots, P_5)]$の作成.

$\to P_1, \neg P_2, \neg P_3, P_3, (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3 \quad \vdots \quad \to P_1, \neg P_2, \neg P_3, P_2, (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3$

$\to P_1, \neg P_2, \neg P_3, P_3, (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3 \quad \vdots \quad \to P_1, \neg P_2, \neg P_3, P_3 \wedge P_2, (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3$

$\to P_1, \neg P_2, \neg P_3, P_3 \wedge (P_3 \wedge P_2), (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3$

$\to P_1, \neg P_2 \vee \neg P_3, P_3 \wedge (P_3 \wedge P_2), (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3 \quad \vdots \quad \to P_1, \neg P_1, P_3 \wedge (P_3 \wedge P_2), (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3$

$\to P_1, (\neg P_2 \vee \neg P_3) \wedge \neg P_1, P_3 \wedge (P_3 \wedge P_2), (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3$

$\to P_1 \wedge (P_1 \wedge P_1), (\neg P_2 \vee \neg P_3) \wedge \neg P_1, P_3 \wedge (P_3 \wedge P_2), (\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3$

$\to (P_1 \wedge (P_1 \wedge P_1)) \vee ((\neg P_2 \vee \neg P_3) \wedge \neg P_1), (P_3 \wedge (P_3 \wedge P_2)) \vee ((\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3) = \Delta(P_1, \cdots, P_5)$

$\to ((P_1 \wedge (P_1 \wedge P_1)) \vee ((\neg P_2 \vee \neg P_3) \wedge \neg P_1)) \vee ((P_3 \wedge (P_3 \wedge P_2)) \vee ((\neg P_4 \vee \neg P_5) \wedge \neg P_3)) = \mathcal{Q}(P_1, \cdots, P_5)$

(2) Proof$[\to \Delta(P_1, \cdots P_5)]$ の $P_1, \cdots, P_5$ に $P(a,a), P(a, f(a)), P(f(a), a), P(f(a), f(f(a)))$

$, P(f(f(a)), f(a))$ を代入: Proof$[\to D(\tau_{11}, \tau_{12}), D(\tau_{21}, \tau_{22})]$ を得る.

即ち Proof$[\to B(\underline{a}\ \tau_{11}, \underline{f}(\tau_{11}), \tau_{12}), B(\underline{a}, \tau_{21}, \underline{f}(\tau_{21}), \tau_{22})]$ を得る。

$\tau_{11} \quad \tau_{12} \quad \tau_{11} \quad \tau_{11}$

$\to \underbrace{(P(a,\underline{a}) \wedge (P(a,a) \wedge P(a,a))) \vee ((\neg P(a, \underline{f}a) \vee \neg P(\underline{f}a, a)) \wedge \neg P(a,\underline{a}))}_{D(\tau_{11}, \tau_{12})\ :\ B(\underline{a}, \tau_{11}, \underline{f}(\tau_{11}), \tau_{12})}, (P(fa, \underline{a})$

$\boxed{\text{phase } 4}$

$\to \exists_{x_2}((P(a,\underline{a}) \wedge (P(a,x_2) \wedge P(x_2,a))) \vee ((\neg P(a, \underline{f}a) \vee \neg P(\underline{f}a, a)) \wedge \neg P(a,\underline{a}))), \exists_{x_2}((P(fa,\underline{a})$

$\to \quad\quad\quad " \quad\quad\quad , \forall y_1 \exists_{x_2}((P(fa, \underline{a})$

$\to \quad\quad\quad " \quad \neg P(a, \underline{f}a) \vee \neg P(\underline{f}a, a) \quad , \exists_{x_1} \forall y_1 \exists_{x_2}((P(x_1, \underline{a})$

$\to \forall y_1 \exists_{x_2}((P(a,\underline{a}) \wedge (P(a, x_2) \wedge P(x_2, a))) \vee ((\neg P(a, y_1) \vee \neg P(y_1, a)) \wedge \neg P(a, \underline{a}))), \quad \deg(\underline{f}a) > \deg \underline{a}$

$\to \exists_{x_1} \forall y_1 \exists_{x_2}((P(x_1, \underline{a}) \wedge (P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_1))) \vee ((\neg P(x_1, y_1) \vee \neg P(y_1, x_1)) \wedge \neg P(x_1, \underline{a}))), \ "$

$\to \exists_{x_1} \forall y_1 \exists_{x_2}((P(x_1, \underline{a}) \wedge (P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_1))) \vee ((\neg P(x_1, y_1) \vee \neg P(y_1, x_1)) \wedge \neg P(x_1, \underline{a})))$

$\to \forall y_0 \exists_{x_1} \forall y_1 \exists_{x_2}((P(x_1, y_0) \wedge (P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_1))) \vee ((\neg P(x_1, y_1) \vee \neg P(y_1, x_1)) \wedge \neg P(x_1, y_0)))$

(註)　$\underline{f}(f(a))$, $\underline{f}(a)$, $\underline{a}$ の自由変数 $\alpha_{f(f(a))}$, $\alpha_{f(a)}$, α_a への置き換えは省略.

$$\land(P(fa,a)\land P(a,fa)))\lor((\neg P(fa,\underline{f}fa)\lor\neg P(\underline{f}fa,fa))\land\neg P(fa,\underline{a}))$$

$D(\tau_{21},\tau_{22})$: $B(\underline{a},\tau_{21},\underline{f}(\tau_{21}),\tau_{22})$

$\longrightarrow deg(\underline{f}(a)) < deg(\underline{f}(f(a)))$

$$\land(P(fa,x_2)\land P(x_2,fa)))\lor((\neg P(fa,\underline{f}fa)\lor\neg P(\underline{f}fa,fa))\land\neg P(fa,\underline{a}))$$

———————————————— $\forall$

$$\land(P(fa,x_2)\land P(x_2,fa)))\lor((\neg P(fa,y_1)\lor\neg P(y_1,fa))\land\neg P(fa,\underline{a}))$$

———————————————— $\exists$

$$\land(P(x_1,x_2)\land P(x_2,x_1)))\lor((\neg P(x_1,y_1)\lor\neg P(y_1,x_1))\land\neg P(x_1,\underline{a}))$$

———————————————— $\forall$

〃　　　　　〃

———————————————— $\exists$

〃　　　　　〃

———————————————— 減

—— $\forall$

$\mathrm{Proof}[\rightarrow\forall_{y_0}\exists_{x_1}\forall_{y_1}\exists_{x_2}B(y_0,x_1,y_1,x_2)]$

Appendix

[PHase 2] の手続きの正当性

Fig.1 に示されるフローチャートの $\boxed{\quad}$ の部分が

$m \geq 1$ を fix したとき

「$D(\tau_{11},\cdots,\tau_{1n})\vee\cdots\vee D(\tau_{m1},\cdots,\tau_{mn})$ が妥当となる $\tau_{ij}\in U(D(x_1,\cdots,x_n))$ が存在するか?」の判定アルゴリズムを与えていることを示す

変数 $x_{11},\cdots,x_{1n},\cdots,x_{m1},\cdots,x_{mn}$ を $y_1,\cdots,y_M$ $(M=mn)$ とし

$D(x_{11},\cdots,x_{1n})\vee\cdots\vee D(x_{m1},\cdots,x_{mn}) = E(y_1,\cdots,y_M)$ とかく。

[Proposition] 閉論理式(∀, ∃ をもたない)$E(y_1,\cdots,y_M)$ につき、

$E(\tau_1,\cdots,\tau_M)$ が妥当となる $\tau_i\in U(E(y_1,\cdots,y_M))$ が存在する。

$\rightleftarrows$ $\underset{prop.}{\vdash} E(\tau_1,\cdots,\tau_M)$ なる $\tau_i\in U(E(y_1,\cdots,y_M))$ が存在する。

$\rightleftarrows$ $E(y_1,\cdots,y_M)$ の中の原始論理式の全体 $P=\{\wp_1,\cdots,\wp_N\}$ のある分割 $\mathbb{C}=\{\{\wp_{11},\cdots,\wp_{1k_1}\},\cdots,\{\wp_{r1},\cdots,\wp_{rk_r}\}\}$ に対して、

① $\wp_{11}\alpha=\cdots=\wp_{1k_1}\alpha,\cdots,\wp_{r1}\alpha=\cdots=\wp_{rk_r}\alpha$ を成立させる代入 α(統一置換)が存在し、かつ

② $E(y_1,\cdots,y_M)\begin{pmatrix}P_1 & \cdots & P_1\\ \wp_{11} & \cdots & \wp_{1k_1}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}P_r & \cdots & P_r\\ \wp_{r1} & \cdots & \wp_{rk_r}\end{pmatrix}$ はトートロジー。

但し $\underset{prop.}{\vdash}$ は ∀, ∃ 推論なしの LK で証明可能なことをあらわす。

(証明) 始めの $\rightleftarrows$ は命題論理における妥当性と証明可能性の同等性にもとずき明らかである。

第2の $\rightleftarrows$ について証明する.

"→" part: $\vdash_{\text{prop.}} E(\tau_1,\cdots,\tau_M)$ のとき $\alpha=\begin{pmatrix}\tau_1 & \cdots & \tau_M\\ y_1 & & y_M\end{pmatrix}$ とおく.

$E(y_1,\cdots,y_M)$ の素始論理式全体 $P=\{\wp_1,\cdots,\wp_N\}$ に対し代入 α により同じ形となるものを一括することによりきまる分割を $\mathbb{C}=\{\{\wp_{11},\cdots,\wp_{1k_1}\},\cdots,\{\wp_{r1},\cdots,\wp_{rk_r}\}\}$ とする. 従って

① $\wp_{11}\alpha=\cdots=\wp_{1k_1}\alpha(=\mathcal{R}_1),\cdots,\wp_{r1}\alpha=\cdots=\wp_{rk_r}\alpha(=\mathcal{R}_r)$

② また $E(y_1,\cdots,y_M)=H(\wp_{11},\cdots,\wp_{1k_1},\cdots,\wp_{r1},\cdots,\wp_{rk_r})$ とおける

$$\begin{aligned}E(\tau_1,\cdots,\tau_M)&=E(y_1,\cdots,y_M)\alpha\\&=H(\wp_{11}\alpha,\cdots,\wp_{1k_1}\alpha,\cdots,\wp_{r1}\alpha,\cdots,\wp_{rk_r}\alpha)\\&=H(\mathcal{R}_1,\cdots,\mathcal{R}_1,\cdots,\mathcal{R}_r,\cdots,\mathcal{R}_r)\end{aligned}$$

仮定より $\vdash_{\text{Prop.}} H(\mathcal{R}_1,\cdots,\mathcal{R}_1,\cdots,\mathcal{R}_r,\cdots,\mathcal{R}_r)$, $\forall,\exists$ 推論なしに証明される故 $\mathcal{R}_i$ を命題変数 P_i でおきかえ

$$\vdash_{\text{prop.}} H(P_1,\cdots P_1,\cdots,P_r,\cdots P_r)$$

従って $H(P_1,\cdots,P_1,\cdots,P_r,\cdots,P_r)$ はトートロジー

即ち $=H(\wp_{11},\cdots\wp_{1k_1},\cdots,\wp_{r1},\cdots\wp_{rk_r})\begin{pmatrix}P_1 & \cdots & P_1\\ \wp_{11} & & \wp_{1k_1}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}P_r & \cdots & P_r\\ \wp_{r1} & & \wp_{rk_r}\end{pmatrix}$

$=E(y_1,\cdots,y_M)\begin{pmatrix}P_1 & \cdots & P_1\\ \wp_{11} & & \wp_{1k_1}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}P_r & \cdots & P_r\\ \wp_{r1} & & \wp_{rk_r}\end{pmatrix}$ はトートロジー

"←" part: ①をみたす α を $\alpha=\begin{pmatrix}\tau_1 & \cdots & \tau_M\\ y_1 & & y_M\end{pmatrix}$ とする.

②より $\vdash_{\text{Prop.}} E(y_1,\cdots,y_M)\begin{pmatrix}P_1 & \cdots & P_1\\ \wp_{11} & & \wp_{1k_1}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}P_r & \cdots & P_r\\ \wp_{r1} & & \wp_{rk_r}\end{pmatrix}$

更に P_i に $\wp_{i1}\alpha$ を代入してうる式も証明可能. 即ち

$$\vdash_{\text{Prop.}} E(y_1,\cdots,y_M)\begin{pmatrix}\wp_{11}\alpha & \cdots & \wp_{11}\alpha\\ \wp_{11} & & \wp_{1k_1}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\wp_{r1}\alpha & \cdots & \wp_{r1}\alpha\\ \wp_{r1} & & \wp_{rk_r}\end{pmatrix}$$

①より $\wp_{11}\alpha=\wp_{12}\alpha=\cdots=\wp_{1k_1}\alpha,\cdots,\wp_{r1}\alpha=\wp_{r2}\alpha=\cdots=\wp_{rk_r}\alpha$ 故

上記証明可能な式は

$$E(y_1,\cdots,y_M)\begin{pmatrix} s_{11}\alpha & \cdots & s_{1k_1}\alpha \\ s_{11} & \cdots & s_{1k_1}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} s_{r1}\alpha & \cdots & s_{rk_r}\alpha \\ s_{r1} & \cdots & s_{rk_r}\end{pmatrix}$$

$= E(y_1,\cdots,y_M)\alpha \quad = E(\tau_1,\cdots,\tau_M)$ 自体である（註3）

$$E(y_1,\cdots,y_M) = D(x_{11},\cdots,x_{1n})\vee\cdots\vee D(x_{m1},\cdots,x_{mn})$$

の中の原始論理式全体 $\Gamma=\{s_1,\cdots,s_N\}$ の1つの分割 $\mathbb{C}$ に対する Fig. 1. のフローチャートの条件 *1 を $\mathcal{A}(\mathbb{C})$

条件 *2 を $\mathcal{B}(\mathbb{C})$

とかけば [Proposition] は次のようにかける

「 $E(\tau_1,\cdots,\tau_M)$ が妥当となる $\tau_i\in U(E(y_1,\cdots,y_M))$ あり (*)

⇄ $\Gamma=\{s_1,\cdots,s_N\}$ のある分割 $\mathbb{C}$ があって $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ & $\mathcal{B}(\mathbb{C})$.

（一方 Γ の分割全体（有限個，$B(N)$ 個）をカウントする方法は存在する $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \cdots, \mathbb{C}_{B(N)}$（[5]参照），従って，）

⇄ $(\exists)_d\ 1\leqq d\leqq B(N)\ (\mathcal{A}(\mathbb{C}_d)\ \&\ \mathcal{B}(\mathbb{C}_d))$ 」

こゝに，$\mathcal{A}(\mathbb{C})$? は unifiability の検証（[3]参照）であり

$\mathcal{B}(\mathbb{C})$? は命題論理の論理式の恒真性の検証であって

共にアルゴリズムである。従って (*) の検証はアルゴリズムとして右のように与えられる。これは Fig. 1. の $\boxed{\quad}$ の部分である。

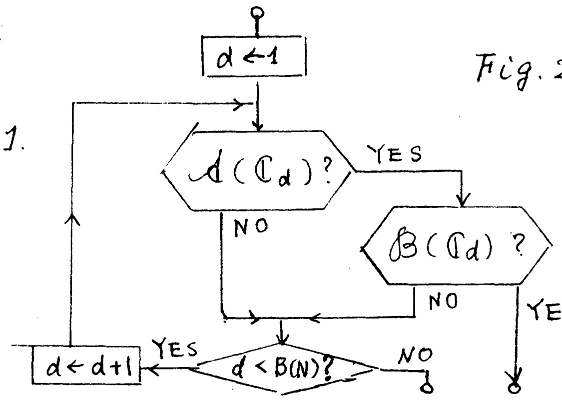


Fig. 2.

謝辞　本稿に関連して立教大学の岩村聯先生，京都大学数理解析研究所の高須達先生，筑波大の五十嵐滋先生には種々御注意をいただきましたことを感謝いたします．

参考文献

[1] J. Shoenfield : Theory of Mathematical Logic (1967), Addison-Wesley.

[2] S. Kleene : Mathematical Logic (1967) John Wiley.

[3] Z. Manna : Mathematical Theory of Computation (1974) McGrow-Hill

[4] 前原昭二： 数理論理学　昭和48年5月　培風館

[5] 大芝猛，永田周郎他：エルブランの定理にもとずく1階述語論理の論理式の妥当性検証プログラムの1つについて：「情報科学の基礎理論の研究」報告集(1) 昭和52年科学研究費総合研究(B)．または日本数学会応用数学分科会予稿集（1977年10月）